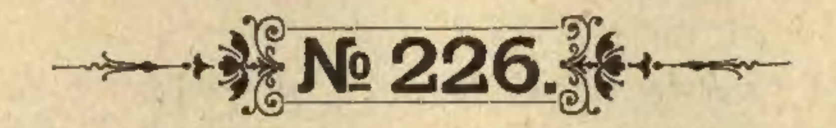
XIX Сем. 25-го Ноября 1895 г. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



НѢКОТОРЫЯ ПРИМѢНЕНІЯ
ДВУЧЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ:
$z^n - 1 = 0$ и $z^n + 1 = 0$.

§ 1. Корни рѣшенныхъ алгебраически двучленныхъ уравненій:

$$z^n - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и

$$z^n + 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

будутъ вообще составныя количества вида:

$$z = x + yi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ x и y количества дѣйствительныя.

Всякое составное количество вида (3) можетъ быть представлено въ видѣ слѣдующаго тригонометрическаго выраженія:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

гдѣ r обозначаетъ дѣйствительное положительное количество и называется *модулемъ*, а φ—*аргументомъ* составного количества z.

Для корней уравненій (1) и (2) модули равны единицѣ, т. е. $r = 1$, такъ что тригонометрическія выраженія этихъ корней будутъ имѣть такой болѣе простой видъ:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и, какъ извѣстно [1]), даются для уравненія (1) формулой:

$$z_{k+1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n - 1,$$

и для уравненія (2) формулой:

$$z_{k+1} = \cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ также

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n - 1.$$

Разсматривая формулы (5) и (6), легко замѣтить, что аргументы корней каждаго изъ соотвѣтствующихъ двучленныхъ уравненій (1) и (2) всѣ различны, положительны, меньше 2π и возрастаютъ по величинѣ, когда вмѣсто k подставлять послѣдовательно числа: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Слѣдовательно, рѣшивъ алгебраически уравненіе (1) или (2) и желая для каждаго изъ полученныхъ такимъ образомъ n корней найти соотвѣтствующее тригонометрическое выраженіе, надо только эти n корней расположить въ такомъ порядкѣ, чтобы ихъ аргументы возрастали по величинѣ отъ 0 до 2π, и приравнять соотвѣтствующимъ по порядку тригонометрическимъ выраженіямъ, даваемымъ для z_{k+1} при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ соотвѣтствующею уравненію формулою (5) или (6).

Чтобы вывести правило: какъ располагать корни уравненія (1) или (2) въ указанномъ порядкѣ, надо разсмотрѣть, какъ измѣняются количества x и y при возрастаніи аргумента φ отъ 0 до 2π; но полагая

$$x + yi = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

получаемъ

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi;$$

слѣдовательно надо разсмотрѣть, какъ измѣняются $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ при возрастаніи φ отъ 0 до 2π.

Здѣсь представляются слѣдующіе четыре случая:

1) Если $\varphi = 0$, то $\sin\varphi = 0$, а $\cos\varphi = 1$.

2) Если φ возрастаетъ отъ 0 до π, то $\sin\varphi > 0$, а $\cos\varphi$ убываетъ отъ $+1$ до -1.

3) Если $\varphi = \pi$, то $\sin\varphi = 0$, а $\cos\varphi = -1$.

4) Если φ возрастаетъ отъ π до 2π, то $\sin\varphi < 0$, а $\cos\varphi$ возрастаетъ отъ -1 до $+1$.

---

[1]) Я. Блюмбергъ. Дополнительныя статьи алгебры. 4-е изданіе. СПБ. 1890. Стран.: 16—17.

Но $\sin\varphi = y$, а $\cos\varphi = x$; поэтому мы получаемъ слѣдующее правило:

Желая n *корней одного изъ уравненій:*

$$z^n - 1 = 0 \text{ или } z^n + 1 = 0,$$

рѣшенныхъ алгебраически, расположить въ такомъ порядкѣ, чтобы ихъ аргументы постепенно возрастали по величинѣ отъ 0 *до* 2π, *разбиваемъ эти корни на четыре группы, при чемъ самыя группы и составляющіе каждую группу корни располагаемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:*

I группа. *Только одинъ корень:* $z = 1$, *если окажется такой.*

II группа. *Всѣ корни вида:* $z = x + yi$, *гдѣ* $y > 0$; *ихъ надо расположить въ такомъ порядкѣ, чтобы ихъ дѣйствительная часть* x *постепенно убывала по величинѣ отъ* $+1$ *до* -1.

III группа. *Только одинъ корень:* $z = -1$, *если окажется такой.*

IV группа. *Всѣ остальные корни; это будутъ корни вида:* $z = x + yi$, *гдѣ* $y < 0$; *ихъ надо расположить въ такомъ порядкѣ, чтобы ихъ дѣйствительная часть* x *постепенно возрастала по величинѣ отъ* -1 *до* $+1$.

Положимъ, что, слѣдуя этому правилу, мы расположили n корней въ требуемомъ порядкѣ и перенумеровали ихъ, и пусть корень, стоящій на $(k+1)$-омъ мѣстѣ, будетъ

$$z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1};$$

въ такомъ случаѣ его можно приравнять тригонометрическому выраженію, даваемому для z_{k+1} соотвѣтствующею изъ формулъ (5) или (6). Такимъ образомъ для уравненія (1) должно быть

$$z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad . \ . \ . \quad (7)$$

откуда

$$\cos\frac{2\pi k}{n} = x_{k+1}, \ \sin\frac{2\pi k}{n} = y_{k+1} \quad . \ . \ . \ . \quad (8)$$

при

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

и для уравненія (2) должно быть

$$z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1} = \cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}, \quad . \ . \quad (9)$$

откуда

$$\cos\frac{\pi(2k+1)}{n} = x_{k+1}, \ \sin\frac{\pi(2k+1)}{n} = y_{k+1} \quad . \ . \quad (10)$$

при

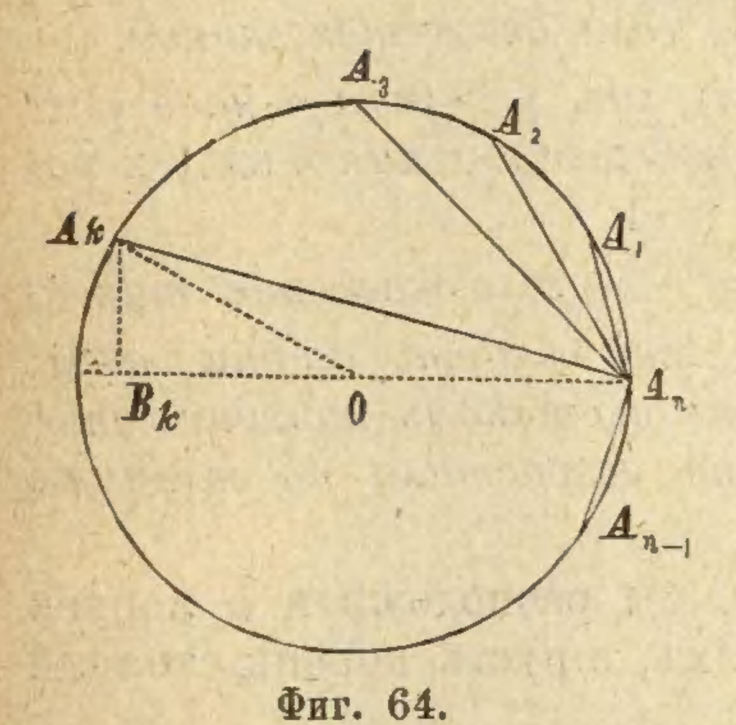
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Формулы (7) и (9) даютъ для каждаго корня двучленныхъ уравненій (1) и (2) соотвѣтствующее ему искомое тригонометрическое вы-

раженіе; формулы же (8) и (10) даютъ возможность привести къ рѣшенію двучленныхъ уравненій (1) и (2) степени n вычисленіе sinus'овъ и cosinus'овъ дугъ, соизмѣримыхъ съ полуокружностью и имѣющихъ общею мѣрою съ нею $\frac{1}{n}$ часть ея.

§ 2. Положимъ, что окружность радіуса R и центра O (фиг. 64) въ точкахъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ раздѣлена на n равныхъ частей, такъ что

$$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \ldots = \overset{\frown}{A_nA_1}.$$



Фиг. 64.

Соединимъ точку A_n прямыми съ остальными точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ и обозначимъ длины полученныхъ такимъ образомъ хордъ соотвѣтственно через $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(n-1)}$, такъ что вообще

$$\overline{A_nA_k} = a_n^{(k)}.$$

Въ такомъ случаѣ $a_n^{(k)}$ будетъ обозначать длину стороны правильнаго вписаннаго n-угольника порядка k; при этомъ n-угольникъ порядка перваго и $(n-1)$-аго будетъ выпуклый [2]), а n-угольники остальныхъ порядковъ звѣздообразные. Вычислимъ $a_n^{(k)}$.

Если a обозначаетъ длину хорды, вписанной въ окружность радіуса R. а φ—величину центральнаго угла, опирающагося на эту хорду, то, какъ извѣстно,

$$a = 2R\sin\frac{\varphi}{2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Но

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}};$$

слѣдовательно

$$a = R\sqrt{2(1-\cos\varphi)} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Замѣчая, что $\angle A_nOA_k = \frac{2\pi k}{n}$, можемъ на основаніи формулъ (11) и (12) написать:

$$a_n^{(k)} = 2R\sin\frac{\pi k}{n} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

и

$$a_n^{(k)} = R\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi k}{n}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

---

[2]) Слѣдовательно обозначеніе: $a_n^{(1)}$, равносильно общепринятому обозначенію: a_n.

Изъ этихъ формулъ вытекаютъ слѣдующія заслуживающія вниманія равенства:

$$a_n^{(k)} = a_n^{(n-k)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$a_{nm}^{(km)} = a_n^{(k)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

При $k = 2m$ изъ формулъ (13) и (8) получаемъ:

$$a_n^{(2m)} = 2Ry_{m+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

если $z_{m+1} = x_{m+1} + iy_{m+1}$ будетъ $(m+1)$-ый корень уравненія (1).

При $k = 2m+1$ изъ формулъ (13) и (10) получаемъ:

$$a_n^{(2m+1)} = 2Ry_{m+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

если $z_{m+1} = x_{m+1} + iy_{m+1}$ будетъ $(m+1)$-ый корень уравненія (2).

Наконецъ при $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ изъ формулъ (14) и (8) получаемъ:

$$a_n^{(k)} = R\sqrt{2(1-x_{k+1})}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

если $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$ будетъ $(k+1)$-ый корень уравненія (1).

Формулы (17) и (18) проще формулы (19) и могутъ быть съ удобствомъ примѣняемы, если приходится пользоваться только одной изъ нихъ; въ противномъ же случаѣ, чтобы не рѣшать двухъ уравненій (1) и (2), удобнѣе пользоваться формулой (19), которая требуетъ рѣшенія только одного уравненія (1).

Такимъ образомъ мы видимъ, что вычисленіе сторонъ правильныхъ вписанныхъ n-угольниковъ можетъ быть приведено къ алгебраическому рѣшенію двучленныхъ уравненій (1) и (2) степени n и даже къ рѣшенію только одного уравненія (1), и слѣдовательно можетъ быть выполнено всегда, ибо высшая алгебра даетъ возможность рѣшить алгебраически уравненія (1) и (2) при какомъ угодно цѣломъ положительномъ показателѣ n.

Построеніе же сторонъ правильныхъ вписанныхъ n-угольниковъ, а слѣдовательно и дѣленіе окружности на n равныхъ частей, можетъ быть выполнено при помощи линейки и циркуля только тогда, когда алгебраическія выраженія корней уравненія (1) содержатъ только квадратные радикалы. Но если n число простое, то, какъ показалъ Gauss, уравненіе (1) можетъ быть рѣшено въ квадратныхъ радикалахъ, а слѣдовательно и окружность можетъ быть раздѣлена на простое число n равныхъ частей при помощи линейки и циркуля только, если $n = 2^m + 1$, гдѣ m цѣлое положительное число. Доказательство этого предложенія можно найти въ курсахъ „Высшей алгебры" J.-A. Serret [3]), проф. М. Е. Ващенко-Захарченко [4]), г. Д. Селиванова [5]) и др.

---

[3]) J.-A. Serret. Cours d'Algèbre supérieure. 5-ème éd. T. II. Paris. 1885. n^{os} 542—547, pages: 556—573.

[4]) М. Е. Ващенко-Захарченко. Высшая алгебра. Кіевъ. 1890. §§ 158—165 стран.: 212—229.

[5]) Д. Селивановъ. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій. СПБ. 1885. §§ 21—40, стран.: 42—92.

§ 3. Чтобы показать примѣненіе правила, выведеннаго въ § 1, и формулъ, выведенныхъ въ § 2, я возьму уравненіе:

$$z^8 - 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Для этого уравненія формула (5) обращается въ слѣдующую:

$$z_{k+1} = \cos\frac{\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi k}{4},$$

или

$$z_{k+1} = \cos(45^0.k) + i\sin(45^0.k), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

гдѣ

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 7.$$

Замѣчая, что тождественно:

$$z^8 - 1 = (z-1)(z+1)(z^2+1)(z^4+1),$$

легко найдемъ восемь значеній для z:

$$z = \pm 1,$$

$$z = \pm i,$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Располагая эти корни согласно правилу, данному въ § 1, и приравнивая ихъ тригонометрическимъ выраженіямъ, даваемымъ формулою (21) для z_{k+1} при $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 7$, получаемъ:

I группа: $z_1 = x_1 + y_1 i = 1 = \cos 0^0 + i\sin 0^0$;

II группа:
$$\begin{cases} z_2 = x_2 + y_2 i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 + i\sin 45^0, \\ z_3 = x_3 + y_3 i = i = \cos 90^0 + i\sin 90^0, \\ z_4 = x_4 + y_4 i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 135^0 + i\sin 135^0; \end{cases}$$

III группа: $z_5 = x_5 + y_5 i = -1 = \cos 180^0 + i\sin 180^0$;

IV группа:
$$\begin{cases} z_6 = x_6 + y_6 i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 225^0 + i\sin 225^0, \\ z_7 = x_7 + y_7 i = -i = \cos 270^0 + i\sin 270^0, \\ z_8 = x_8 + y_8 i = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 315^0 + i\sin 315^0; \end{cases}$$

отсюда:

$$x_1 = 1 = \cos 0^0, \qquad y_1 = 0 = \sin 0,$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0,$$

$$x_3 = 0 = \cos 90^0, \qquad y_3 = 1 = \sin 90^0,$$

$$x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 135^0, \qquad y_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 135^0,$$

$$x_5 = -1 = \cos 180^0, \qquad y_5 = 0 = \sin 180^0,$$

$$x_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 225^0, \qquad y_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 225^0,$$

$$x_7 = 0 = \cos 270^0, \qquad y_7 = -1 = \sin 270^0,$$

$$x_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 315^0, \qquad y_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 315^0.$$

На основанiи этихъ равенствъ, а также равенствъ (15) и (16) по формулѣ (19) находимъ:

$$a_8^{(1)} = a_8^{(7)} = a_8 = R\sqrt{2(1-x_2)} = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$a_8^{(2)} = a_8^{(6)} = a_4 = R\sqrt{2(1-x_3)} = R\sqrt{2},$$

$$a_8^{(3)} = a_8^{(5)} = R\sqrt{2(1-x_4)} = R\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$a_8^{(4)} = R\sqrt{2(1-x_5)} = 2R.$$

Величины $a_8^{(2)}$, $a_8^{(4)}$ и $a_8^{(6)}$ можно также найти по формулѣ (17) слѣдующимъ образомъ:

$$a_8^{(2)} = a_8^{(6)} = a_4 = 2Ry_2 = R\sqrt{2},$$

$$a_8^{(4)} = 2Ry_3 = 2R.$$

Вычисленiе же величинъ $a_8^{(1)}$, $a_8^{(3)}$, $a_8^{(5)}$ и $a_8^{(7)}$ по формулѣ (18) потребовало бы рѣшенiя уравненiя:

$$z^8 + 1 = 0.$$

§ 4. Разсматривая руководства къ „Дополнительнымъ статьямъ алгебры“ гг. Соколова, Блюмберга, Флорова и Киселева, я только въ руководствѣ г. Соколова нашелъ правило: какъ располагать корни рѣшеннаго алгебраически уравненiя:

$$x^n - r^n = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (22)$$

въ такомъ порядкѣ, чтобы ихъ аргументы постепенно возрастали отъ 0 до 2π. Именно, полагая, что эти корни будутъ вида:

$$a_\kappa + b_\kappa i,$$

гдѣ

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1,$$

г. Соколовъ говоритъ слѣдующее:

„Вещественные члены корней $a_0, a_1, a_2, \ldots$ дадутъ намъ косинусы, „а коэффиціенты при мнимомъ i—$b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$, дадутъ синусы угловъ „$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots$ при чемъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что корни должно „расположить въ такомъ порядкѣ, чтобы $a_0, a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots$ убывали „отъ $+1$ до -1 и затѣмъ возрастали опять до $+1$, а $b_0, b_1, b_2, \ldots b_k \ldots$ „возрастали отъ 0 до $+1$, затѣмъ убывали до -1 и вновь возрастали „до нуля“[6])...

Правило это, во первыхъ, по отношенію къ уравненію (22) имѣетъ смыслъ лишь при $r = 1$, о чемъ г. Соколовъ почему то умалчиваетъ, а во вторыхъ, оно и при сказанномъ условіи весьма не совершенно и не опредѣленно, ибо расположить только $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ или только $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ въ порядкѣ, указанномъ этимъ правиломъ, это двѣ неопредѣленныя задачи, допускающія множество рѣшеній, а какъ согласить эти задачи, какъ рѣшить ихъ совмѣстно, на это никакихъ практическихъ указаній правило г. Соколова не даетъ.

Остальные изъ вышепоименованныхъ авторовъ не только не даютъ никакого общаго сюда относящагося правила, но даже, приравнивая алгебраическія выраженія корней уравненій:

$$z^3 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

и

$$z^5 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

соотвѣтствующимъ тригонометрическимъ выраженіямъ этихъ корней, не даютъ никакихъ указаній на то, чѣмъ они руководствуются при этомъ. Все ихъ объясненіе ограничивается такими фразами:

„сравнивъ же эти результаты съ предыдущими, найдемъ, что“[7])...

„сравнивъ же эти результаты съ вышенайденными корнями, получимъ“[8])...

„Теперь мы имѣемъ двѣ формы корней; сопоставляя ихъ, получимъ“[9])...

„Сопоставивъ эту форму корней съ тригонометрической формой и „принявъ во вниманіе теорему о равенствѣ комплексныхъ количествъ, „получимъ“[10])...

„Сравнивая два вида корней, находимъ, что“[11])...

Только относительно корней уравненія (24) г. Киселевъ даетъ нѣкоторое поясненіе:

„Сравнивая два вида корней, замѣчаемъ, что $\cos \frac{2\pi}{5}$ можетъ рав-

---

[6]) В. Соколовъ. Дополнительныя статьи алгебры. Островъ. 1892. Стран.: 107.

[7]) Я. Блюмбергъ. Дополнительныя статьи алгебры. 4-е изданіе. СПБ. 1890 Стран.: 18.

[8]) Тамъ же. Стран.: 19.

[9]) П. С. Флоровъ. Курсъ дополнительныхъ статей алгебры. М. 1893. Стран.: 30

[10]) Тамъ же. Стран.: 33.

[11]) А. Киселевъ. Дополнительныя статьи алгебры. М. 1893. Стран.: 100.

„няться или $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, или $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; но такъ какъ $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ „и потому $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$“ [12]).

Что касается вычисленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ, то, исходя изъ графическаго изображенія мнимыхъ выраженій, г. Соколовъ [13]) выводитъ двѣ формулы, которыя, будучи исправлены отъ опечатокъ, имѣютъ слѣдующій видъ:

$$a_n = \sqrt{b_1^2 + (r - a_1)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$a_n^{(\kappa)} = \sqrt{b_{\kappa+1}^2 + (r - a_{\kappa+1})^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ

$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ n-2.$$

Здѣсь $a_n^{(\kappa)}$ обозначаетъ то, что по моему обозначенію должно бы быть изображено черезъ $a_n^{(\kappa+1)}$. Мое обозначеніе, между прочимъ, тѣмъ удобнѣе, что даетъ возможность на основаніи равенства (16) сокращать верхній и нижній индексы символа $a_n^{(\kappa)}$ на ихъ общаго множителя, не нарушая величины символа. Вводя въ формулы (25) и (26) принятыя мною въ этой статьѣ обозначенія, можно обѣ эти формулы соединить въ одну слѣдующую:

$$a_n^{(\kappa)} = R\sqrt{y_{\kappa+1}^2 + (1 - x_{\kappa+1})^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

гдѣ

$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1,$$

при чемъ $z_{\kappa+1} = x_{\kappa+1} + iy_{\kappa+1}$ будетъ $(k+1)$-ый корень уравненія (1).

Формулу же (27) легко вывести и безъ помощи графическаго изображенія мнимыхъ выраженій слѣдующимъ образомъ. Опустимъ изъ точки A_κ (фиг. 64) перпендикуляръ $A_\kappa B_\kappa$ на діаметръ, проведенный въ точку A_n; тогда изъ прямоугольнаго $\triangle$-а $A_n A_\kappa B_\kappa$ будемъ имѣть:

$$\overline{A_n A_\kappa} = \sqrt{\overline{A_\kappa B_\kappa}^2 + \overline{A_n B_\kappa}^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Но

$$\overline{A_n A_\kappa} = a_n^{(\kappa)},$$

$$\overline{A_\kappa B_\kappa} = \overline{OA_\kappa}.\sin A_\kappa O B_\kappa = R\sin\left(\pi - \frac{2\pi k}{n}\right) = R\sin\frac{2\pi k}{n} = Ry_{\kappa+1},$$

$$\overline{A_n B_\kappa} = \overline{OA_n} + \overline{OB_\kappa} = \overline{OA_n} + \overline{OA_\kappa}.\cos A_\kappa O B_\kappa = R + R\cos\left(\pi - \frac{2\pi k}{n}\right) =$$

$$= R - R\cos\frac{2\pi k}{n} = R\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n}\right) = R(1 - x_{\kappa+1});$$

---

[12]) Тамъ же. Стран.: 101.

[13]) В. Соколовъ. Дополнительныя статьи алгебры. Островъ. 1892. Стран.: 107—108.

подставляя въ равенство (28) эти значенія для $\overline{A_nA_k}$, $\overline{A_kB_k}$ и $\overline{A_nB_k}$, получимъ формулу (27).

Сравненіе формулъ (19) и (27) заставляетъ отдать преимущество формулѣ (19), какъ болѣе простой.

Г. Киселевъ примѣняетъ формулы (8) къ построенію нѣкоторыхъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ, но сторонъ ихъ не вычисляетъ.

Гг. Блюмбергъ и Флоровъ для вычисленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ пользуются формулой (13); но способы, которые они употребляютъ для вычисленія $\sin\frac{\pi k}{n}$ въ разсматриваемыхъ ими частныхъ случаяхъ, не могутъ быть обобщены.

Формулой (13) пользуется для той же цѣли также и Serret въ своемъ „Traité de Trigonométrie“ [14]), но для вычисленія $2\sin\frac{\pi k}{n}$ онъ употребляетъ весьма остроумный и оригинальный пріемъ, который не требуетъ примѣненія правила, даннаго въ § 1 этой статьи, а требуетъ вывода другого соотвѣтствующаго правила; поэтому этого пріема я и не излагаю здѣсь.

Учит. Варш. реальн. учил. *С. Гирманъ.*

ИЗСЛѢДОВАНІЕ О МНОГОГРАННИКАХЪ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ.

А. БРАВЭ.

(*Переводъ съ французскаго*).

(*Окончаніе* *).

Теорема LIII.—*Въ децемтерномъ многогранникѣ имѣется постоянно пятнадцать двойныхъ осей.*

Повернемъ данный многогранникъ на 72° вокругъ OM, фиг. 36, отъ A_0 къ A_1, затѣмъ на 120° вокругъ $0A_1$, по направленію отъ A_2 къ A_0; слѣдствіемъ этихъ двухъ поворотовъ будетъ переходъ полюса A_0 въ A_1 и A_1 въ A_0. Конечный результатъ таковъ же, какъ если бы мы поворотили многогранникъ на 180° вокругъ радіуса OG, упирающагося въ средину дуги A_0A_1. Видимое положеніе угловъ не измѣнилось; слѣдовательно G есть конечная точка оси четнаго порядка, несомнѣнно второго. Такъ какъ правильный додекаэдръ имѣетъ тридцать противолежащихъ попарно реберъ, то общее число двойныхъ осей равно пятнадцати.

---

[14]) J.-A. Serret. Traité de Trigonométrie. 4-ième éd. Paris. 1868. n^{os} 167—174, pages: 209—219.

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 214, 215, 218, 221, 222 и 225.

Никакой другой діаметръ шара не можетъ быть двойной осью, потому что какое бы положеніе онъ не занималъ, онъ обусловилъ бы повтореніе тройныхъ осей, и число ихъ было бы больше десяти, что, какъ мы знаемъ, невозможно (теорема XLIII).

Можно было бы также получить пятнадцать двойныхъ осей, соединяя попарно средины противолежащихъ краевъ икосаэдра MM_0M_1...

Теорема LIV.—*Децемтерные многогранники или имѣютъ пятнадцать плоскостей симметріи, соединяющихъ попарно шесть пятерныхъ осей, или совсѣмъ не имѣютъ плоскостей симметріи.*

Разсмотримъ плоскость, идущую черезъ центръ шара и черезъ углы M и M_3, фиг. 36. Эта плоскость будетъ плоскостью симметріи для системы точекъ (A_0, A_1), (A_4, A_2)..., (M_2, M_4), (M_1, M_0) и т. д.; такимъ образомъ она не вызываетъ удвоенія числа осей, слѣдовательно ничто не противорѣчитъ присутствію такой плоскости симметріи.

Плоскость MM_3 расположена перпендикулярно къ прямой KK', двойной оси системы. Плоскостей, гомологичныхъ указанной, имѣется всего пятнадцать, а именно MM_0, MM_1, MM_2, MM_3, MM_4; M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_0, M_4M_1; M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_0. Очевидно, что это—единственныя плоскости симметріи, которыя могутъ быть въ многогранникѣ; для всякаго другого положенія плоскости число тройныхъ осей превысило бы 10, что невозможно (теорема XLIII).

На фигурѣ 36 указано расположеніе шестидесяти гомологичныхъ угловъ S вокругъ полюсовъ A_0, A_1 и т. д. въ томъ случаѣ, когда многогранникъ не имѣетъ плоскостей симметріи.

Если же существуютъ указанныя выше пятнадцать плоскостей симметріи въ многогранникѣ, то треугольникъ $SS'S''$ замѣнится шестиугольникомъ. Чтобы не зачернить слишкомъ фигуры, мы ограничились изображеніемъ только одного изъ этихъ шестиугольниковъ, расположеннаго вокругъ полюса B_0. Система угловъ, гомологичныхъ S, охватываетъ тогда сто двадцать угловъ. Въ извѣстныхъ особенныхъ положеніяхъ S число это можетъ быть сведено къ шестидесяти, двадцати, и даже къ двѣнадцати угламъ. Этотъ послѣдній случай имѣетъ мѣсто, когда уголъ S находится на концѣ одной изъ пятерныхъ осей системы.

Теорема LV. — *Если въ децемтерномъ многогранникѣ имѣются пятнадцать плоскостей симметріи, указанныя въ предыдущей теоремѣ, то эти плоскости перпендикулярны къ пятнадцати двойнымъ осямъ, и многогранникъ обладаетъ центромъ симметріи; въ противномъ случаѣ центръ симметріи отсутствуетъ.*

Изъ доказательства предыдущей теоремы слѣдуетъ, что двойная ось KOK', фиг. 36, перпендикулярна къ плоскости M_3GMA_3. Но эта плоскость есть одна изъ пятнадцати плоскостей симметріи многогранника, слѣдовательно каждая изъ этихъ плоскостей перпендикулярна къ одной изъ пятнадцати осей, и такимъ образомъ многогранникъ обладаетъ центромъ симметріи (теорема XXII). Если же многогранникъ не имѣетъ плоскостей симметріи, то въ силу существованія въ немъ двойныхъ осей, онъ не можетъ имѣть центра симметріи.

Теорема LVI.—*Децемтерные многогранники могутъ быть двухъ раз-*

личныхъ родовъ симметріи, въ зависимости отъ присутствія или отсутствія центра симметріи.

Это есть слѣдствіе теоремъ LIV и LV.

Символы этихъ двухъ родовъ симметріи:

$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ 0C,\ 0P],$$

$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2].$$

Теорема LVII.—*Оси, характеризующія симметрію кватертерныхъ многогранниковъ съ прямоугольными двойными осями, присущи также симметріи децемтерныхъ многогранниковъ.*

Выберемъ любую точку какой-нибудь тройной оси, напр., A_2, фиг. 36. Средина G одной изъ двухъ сторонъ A_1A_0 и A_3A_4, которыя въ пятиугольникѣ $A_0A_1A_2A_3A_4$ прилегаютъ къ сторонѣ A_0A_4, противолежащей углу A_2, будетъ конечной точкой одной изъ двойныхъ осей (теорема LIII). То же будетъ имѣть мѣсто по отношенію къ точкамъ H и K, которыя гомологичны G по отношенію къ тройной оси $0A_2$. Въ сферическомъ треугольникѣ HGK три угла H, G и K—прямые; такимъ образомъ стороны HG, KG и HK равны 90^0.

Три оси 0G, 0H и 0K, поэтому, суть три прямоугольныя тройныя оси, и сферическій треугольникъ GHK — сферическій треугольникъ съ тремя прямыми углами. Уголъ A_2—центръ этого треугольника. Далѣе, A_4—центръ треугольника GHK′, также содержащаго три прямыхъ угла; B_0—центръ одинаковаго треугольника GH′K′, при чемъ H′—низшій конецъ оси 0H, и B_1 — центръ треугольника KGH′ съ тремя прямыми углами.

Четыре тройныя оси $0A_2$, $0A_4$, $0B_0$, $0B_1$ слѣдовательно, сочетаются съ тремя двойными прямоугольными осями въ такомъ же отношеніи, какое характерно для кватертерныхъ многогранниковъ съ двойными прямоугольными осями.

Замѣчаніе.—Вмѣсто комбинаціи $0A_2$, $0A_4$, $0B_0$, $0B_1$ можно взять одну изъ слѣдующихъ четырехъ комбинацій:

$$[0A_0,\ 0A_3,\ 0B_1,\ 0B_2],\quad [0A_0,\ 0A_2,\ 0B_3,\ 0B_4]$$

$$[0A_1,\ 0A_3,\ 0B_0,\ 0B_4],\quad [0A_1,\ 0A_4,\ 0B_2,\ 0B_3].$$

Теорема LVIII.—*Многогранники* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ *обладаютъ всѣми элементами симметріи многогранниковъ* $[4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$. *Многогранники* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$ *обладаютъ всѣми элементами симметріи многогранниковъ* $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$.

Часть этой теоремы, относящаяся къ осямъ симметріи, уже доказана въ предыдущей теоремѣ. Изъ этого легко заключить, что многогранники $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ обладаютъ всѣми элементами симметріи многогранниковъ $[4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$.

Если децемтерный многогранникъ имѣетъ кромѣ того еще пятнадцать плоскостей симметріи, то плоскости KG, GH, HK, фиг. 36, находящіяся между ними, будутъ представлять плоскости $3P^2$ многогранника $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$. Такъ какъ центръ симметріи C существуетъ въ обоихъ случаяхъ, то очевидно, что симметрія, характеризущаяся посредствомъ $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$ заключается въ болѣе совершенномъ многогранникѣ $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$.

Замѣчаніе.—Теоремы LVII и LVIII не имѣютъ прямого значенія для общей теоріи симметрическихъ многогранниковъ. Онѣ приведены здѣсь въ виду того примѣненія, какое онѣ могутъ имѣть въ кристаллографіи, при изученіи правильной системы.

Распредѣленіе многогранниковъ по роду ихъ симметріи

съ указаніемъ минимальнаго числа ихъ угловъ.

Многогранники			Символъ симметріи многогранниковъ	Классъ многогранника	Минимальное число угловъ			
					1 рода	2 рода	3 рода	4 рода
ассиметрич.			$0L, 0C, 0P$	1	1	1	1	1
Симметрическіе		безъ осей	$0L, C, 0P$	2	2	2	2	
Симметрическіе		безъ осей	$0L, 0C, P$	3	1	1	1	
Симметрическіе	съ главною осью	четнаго порядка	$A^{2q}, 0L^2, 0C, 0P$	4	$2q$	$2q$		
Симметрическіе	съ главною осью	четнаго порядка	$A^{2q}, 0L^2, C, \Pi$	5	$2q$	$2q$		
Симметрическіе	съ главною осью	четнаго порядка	$A^{2q}, qL^2, qL'^2, 0C, 0P$ . . .	6	$4q$			
Симметрическіе	съ главною осью	четнаго порядка	$A^{2q}, 0L^2, 0C, qP, qP'$	7	$2q$	1		
Симметрическіе	съ главною осью	четнаго порядка	$A^{2q}, qL^2, qL'^2, C, \Pi, qP^2, qP'^2$	8	$2q$	0 или $2q$*)		
Симметрическіе	съ главною осью	четнаго порядка	$A^{2q}, 2qL^2, 0C, 2qP$	9	$4q$			
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, 0L^2, 0C, 0P$	10	$2q+1$	$2q+1$		
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, 0L^2, C, 0P$	11	$4q+2$	$4q+2$		
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, 0L^2, 0C, \Pi$	12	$2q+1$	$2q+1$		
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, 0P$ . .	13	$4q+2$			
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, 0L^2, 0C, (2q+1)P$.	14	$2q+1$	1		
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, C, (2q+1)P^2$	15	$4q+2$			
Симметрическіе	съ главною осью	нечетнаго порядка	$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, \Pi(2q+1)P$	16	$2q+1$			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	кватертерные	$4L^3, 3L^2, 0C, 0P$	17	12			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	кватертерные	$4L^3, 3L^2, C, 3P^2$	18	12			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	кватертерные	$4L^3, 3L^2, 0C, 6P$	19	4			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	кватертерные	$3L^4, 4L^3, 6L^2, 0C, 0P$ . .	20	24			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	кватертерные	$3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$ . .	21	6			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	децемтерные	$6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P$.	22	60			
Симметрическіе	сфероэдрическіе	децемтерные	$6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2$.	23	12			

*) Минимальное число угловъ 2-го рода равно $2q$, если $q = 1$, и 0, если $q > 1$.

Приведенная таблица указываетъ распредѣленіе многогранниковъ въ двадцать три класса, согласно принципамъ, разсмотрѣннымъ въ этомъ изслѣдованіи. Значенія символовъ $\varLambda$, L, L′, C, $\varPi$, P, P′ указаны раньше.

Мы видимъ, что классы 4, 5 до 16 включительно распадаются снова на порядки различнаго рода, въ зависимости отъ порядка симметріи главной оси.

Желательно, напр., изучить по этой таблицѣ элементы симметріи, присущіе многограннику 7 класса 4 порядка. Символъ его:

$$[\varLambda^4,\ 0L^2,\ 0C,\ 2P,\ 2P'],$$

откуда мы узнаемъ, что этотъ многогранникъ имѣетъ четверную ось и четыре, проходящихъ черезъ эту ось, плоскостей симметріи, которыя пересѣкаютъ другъ друга подъ 45^0, двѣ плоскости одного рода, взаимно перпендикулярныя, и двѣ, также взаимно перпендикулярныя, плоскости, но уже другого рода сравнительно съ первыми,—двойныя оси и центръ симметріи отсутствуютъ.

Четыре послѣднихъ столбца указываютъ наименьшее число угловъ каждаго многогранника. Всѣ углы одного рода образуютъ систему гомологичныхъ угловъ, и такихъ гомологичныхъ системъ существуетъ столько, сколько различныхъ родовъ угловъ въ многогранникѣ.

Посредствомъ простого разсужденія легко можно будетъ найти форму, которую долженъ имѣть многогранникъ съ наименьшимъ числомъ угловъ. Такъ, наиболѣе простымъ многогранникомъ будетъ

въ 1 классѣ—неправильный тетраэдръ;

во 2 классѣ—неправильный октаэдръ съ параллелограммомъ въ основаніи;

въ 3 классѣ—разносторонній треугольникъ;

въ 19 классѣ—правильный тетраэдръ;

въ 21 классѣ—правильный октаэдръ;

въ 23 классѣ—правильный икосаэдръ и т. д.

Як. Самойловъ (Спб.).

РЕЦЕНЗІИ.

„Сборникъ геометрическихъ задачъ съ примѣненіемъ тригонометріи для ихъ рѣшенія. Для учениковъ гимназій и реальныхъ училищъ“.

Сост. Н. Сорокинъ, преподават. Кіево-печерской гимназіи. Кіевъ, IV изд. 1894 г.

Съ 1891 г. во всѣхъ гимназіяхъ М. Н. Пр., а съ прошлаго 1895 г. и въ реальныхъ училищахъ, правилами, утвержденными М. Н. Пр. отъ 12 мая 1891 г. и 29 апрѣля 1895 г., произведено было коренное преобразованіе въ дѣлѣ преподаванія математики вообще и въ особенности *геометріи* и *тригонометріи*.

Преобразованіе это существеннымъ образомъ измѣняетъ какъ самую постановку преподаванія этихъ важныхъ образовательныхъ предметовъ гимназическаго

обученія, такъ и методовъ ихъ, ставя каждый изъ сихъ предметовъ не въ обособленныя рамки, какъ это было ранѣе, но въ ближайшее тѣсное общеніе, что и по существу дѣла непремѣнно должно быть таковымъ. Въ виду такого важнаго преобразованія, примѣнительно къ этому измѣнена была также и самая система письменныхъ испытаній зрѣлости въ гимназіяхъ, (а съ 1895 г. тѣ же требованія примѣнены и для учениковъ реальныхъ училищъ, оканчивающихъ курсъ въ дополнительномъ классѣ), именно:—отъ экзаменующихся требуется умѣніе и достаточный навыкъ вводить въ рѣшеніе предложенной геометрической задачи различныя тригонометрическія функціи, которыя съ одной стороны упрощаютъ самый ходъ рѣшенія задачи, обобщаютъ выводы; а съ другой—такой методъ рѣшенія геометрической задачи доставляетъ возможность обнаружить степень знанія ученика обоихъ этихъ предметовъ,—его умѣніе пользоваться тригонометрическими формулами, логариѳмами и вообще разными видами рѣшенія треугольниковъ.

Для успѣшнаго выполненія такого рода работъ по геометріи, ученики должны имѣть достаточную къ этому подготовку, что можетъ быть достигнуто лишь систематическимъ ихъ упражненіемъ въ рѣшеніи подобнаго рода спеціально составленныхъ геометрическихъ задачъ и примѣровъ. Временемъ для этой подготовки надо бы считать 2-е учебное полугодіе въ курсѣ VII-го класса, когда уже курсъ тригонометріи является почти законченнымъ,—и полный учебный годъ въ курсѣ VIII-го кл., гдѣ еще свободнѣе можно пройти съ учениками повторительные курсы геометріи и тригонометріи въ ихъ взаимной связи, постоянно при этомъ упражняя учениковъ въ рѣшеніи спеціально составленныхъ для этого задачъ, примѣровъ и упражненій;—но, однако, врядъ ли вездѣ, во всѣхъ гимназіяхъ, можетъ представиться возможность выполнить весь курсъ тригонометріи въ одно только 1-е учебн. полугодіе въ VII классѣ, пользуясь хотя бы и 2-хъ часовымъ недѣльнымъ урокомъ. Вопросъ этотъ слишкомъ сложный уже по самому своему существу, не говоря о побочныхъ условіяхъ, могущихъ еще болѣе, еще сильнѣе стѣснить преподавателя въ ускоренномъ прохожденіи имъ предмета тригонометріи; этими осложняющими условіями въ большинствѣ случаевъ является большое скопленіе учащихся въ этомъ классѣ, доходящее нерѣдко до 40 и болѣе учениковъ (напримѣръ въ Саратовской гимназіи, гдѣ это число колеблется за послѣдніе 6 лѣтъ въ предѣлахъ 37 — 46 учениковъ) и, во 2-хъ,—разная степень уровня успѣшности учениковъ, при чемъ даже 10-ти—12-ти процентная неуспѣшность можетъ сильно задержать преподаваніе. Другое совсѣмъ дѣло, когда число учащихся въ VII классѣ ограничивается 15—20-ю учениками; въ этомъ случаѣ для преподавателя всегда легче уравнять успѣшность класса и, сравнительно, въ болѣе короткое время пройти весь теоретическій курсъ предмета. Принявъ все это къ свѣдѣнію, можно навѣрное, для большинства гимназій, предположить, что теоретическій курсъ тригонометріи оканчивается лишь къ концу 3-й учебн. четверти года и, слѣдовательно, только лишь съ этого времени можно начать систематическое повтореніе курса геометріи въ связи съ тригонометріей. При этомъ преподаваніи вся цѣль преподавателя должна быть направлена къ тому, чтобы объяснить ученикамъ, какую незамѣнимую, важную для дѣла оказываетъ услугу тригонометрія въ дѣлѣ рѣшенія различныхъ геометрическихъ вопросовъ, теоремъ и задачъ, которыя съ геометрической точки зрѣнія не всегда даже могутъ быть выполнены. Новизна этого дѣла для ученика и значительный его личный интересъ въ рѣшеніи подобнаго рода вопросовъ аналитическимъ методомъ, каковымъ въ данномъ случаѣ является методъ тригонометріи, — значительно облегчаетъ трудъ преподавателя и дѣло идетъ тѣмъ успѣшнѣе, чѣмъ интереснѣе и удачнѣе составленъ подборъ задачъ и примѣровъ, которыми пользуется

преподаватель. Въ самостоятельномъ рѣшеніи этихъ примѣровъ ученики сами, помимо даже ближайшаго руководства преподавателя, время-отъ-времени пріучаются постигать внутреннюю, аналитическую связь, которая въ окончательномъ результатѣ приводитъ ученика къ той или другой удобной формулѣ, пользуясь которой, путемъ подстановокъ, ученикъ самъ уже можетъ получить изъ нея отвѣты на всѣ частные случаи того же главнаго вопроса. Подобнаго рода занятія ученика являются въ высшей степени благотворными въ дѣлѣ общаго развитія его мыслительныхъ способностей; они пріучаютъ его къ правильному и разумному анализированію своихъ вычисленій и добытыхъ результатовъ и, *непремѣнно*,—содѣйствуютъ къ легчайшему запоминанію важнѣйшихъ геометрическихъ и тригонометрическихъ формулъ, вмѣсто обычнаго и не всегда надежнаго способа,—ихъ механическаго заучиванія,—способа, развивающаго скорѣе память ученика, чѣмъ его соображеніе. Починъ въ этомъ дѣлѣ, конечно, долженъ принадлежать прежде всего самому учителю и нельзя сказать, чтобы способъ—довести ученика до яснаго сознанія, какое громадное преимущество имѣетъ тригонометрическій методъ рѣшенія многихъ чисто геометрическихъ вопросовъ,—былъ бы очень труденъ: достаточно будетъ указать ученику и сдѣлать сравненіе выводовъ чисто геометрическаго способа рѣшенія задачи съ рѣшеніемъ ея же при помощи тригонометрическаго метода,—на какихъ либо двухъ-трехъ типичныхъ примѣрахъ, каковыми, напримѣръ, могли бы служить: „опредѣленіе сторонъ правильнаго вписан. и описанн. многоугольниковъ при данномъ радіусѣ круга“.—Задача эта, какъ чисто геометрическая, рѣшается только въ частности для опредѣленнаго лишь числа сторонъ; тригонометрическій же методъ ея рѣшенія даетъ окончательную общую формулу, для которой уже всѣ геометрическіе случаи того же характера являются лишь частными случаями и получаются простой подстановкой.—На одномъ этомъ примѣрѣ учитель долженъ остановиться возможно дольше, чтобы объяснить ученику всю разницу хода этихъ рѣшеній и значительнаго преимущества аналитическаго метода передъ чисто геометрическимъ, ибо,—на сколько послѣдній представляетъ много разныхъ своеобразностей, искусственности и даже вычурности, [какъ напр. въ опредѣленіи сторонъ правильнаго вписаннаго 10, 15-угольниковъ и друг.] и если не представляетъ особенной трудности для вычисленій, по ихъ элементарности, то во всякомъ случаѣ, для запоминанія каждаго случая въ отдѣльности—дѣло это весьма не легкое для ученика и требуетъ большого напряженія его памяти, почти не затрагивая соображенія, кромѣ, конечно, самыхъ обыкновенныхъ случаевъ, какъ то a_3, a_4, a_6, a_{10} и соотвѣтственно для b_3, b_4,... Но тотъ же вопросъ, рѣшенный тригонометрическимъ методомъ, приводитъ только къ двумъ окончательнымъ формуламъ, для которыхъ всѣ частныя положенія являются слѣдствіями. Одинъ уже аналитическій разборъ приведеннаго примѣра, въ связи съ ему подобными, можетъ достаточно обезпечить успѣхъ дѣла и привести самого ученика къ ясному уразумѣнію той незамѣнимой и въ высшей степени почтенной роли, какую выполняетъ тригонометрическій методъ рѣшенія многихъ чисто геометрическихъ вопросовъ, и можетъ въ ближайшемъ же будущемъ навести и самого ученика на рядъ подобныхъ же разсужденій и выводовъ. Нужно только стараться время отъ времени поддерживать ученика въ правильномъ руководствѣ и выборѣ выдающихся по своей важности примѣровъ и задачъ, рѣшеніе которыхъ еще болѣе откроетъ предъ ученикомъ замѣчательную внутреннюю связь, существующую между двумя, повидимому, разнородными предметами, какъ геометрія и тригонометрія. Для успѣшнаго достиженія новыхъ цѣлей Министерства въ дѣлѣ раціональной постановки и преподаванія математики въ гимназіяхъ, понадобились и новыя, спеціально для этого составленныя, учебныя пособія, ибо

прежнія руководства,—*дореформенныя*, уже только въ малой весьма мѣрѣ могли находить для себя примѣненіе въ новой учебной практикѣ; это-то именно обстоятельство и побудило многихъ изъ гг. составителей учебныхъ пособій этого рода озаботиться составленіемъ „*спеціальныхъ сборниковъ геометрическихъ задачъ и примѣровъ*“, рѣшеніе которыхъ основывалось бы на примѣненіи къ нимъ тригонометрическаго метода. Сборниковъ такого рода имѣется въ настоящее время уже около 10, причемъ одинъ изъ нихъ „Сборникъ геометрическихъ задачъ для учениковъ гимназій и реальныхъ училищъ“, составленный г. Сорокинымъ,—преподавателемъ Кіево-Печерской гимназіи,—отпечатанъ теперь уже 4-мъ изданіемъ въ декабрѣ 1894 г.— Это изданіе, (равно какъ и предыдущее—3-е), получило одобреніе Уч. Ком. М. Н. Пр.; оно представляетъ въ своемъ составѣ весьма удачно скомбинированные 116 номеровъ задачъ на одинъ только отдѣлъ „Планиметріи“ и 164 задачи на „Стереометрію“, не считая цѣлаго ряда отдѣльныхъ упражненій, приложенныхъ къ нѣкоторымъ задачамъ. Всѣ почти задачи этого „Сборника“ распредѣлены въ правильной систематической послѣдовательности по разнымъ отдѣльнымъ ученіямъ изъ всего курса геометріи. Обстоятельство это значительно облегчаетъ трудъ преподавателя и ученика при выборѣ задачъ на извѣстный отдѣлъ. Первое изданіе этого „Сборника“ вышло въ концѣ 1892 года,—а къ концу 1894 года мы уже видимъ 4-е его изданіе,—это обстоятельство уже само по себѣ очень знаменательное и, объясняясь съ одной стороны лестнымъ вниманіемъ многихъ преподавателей къ этому учебному пособію,—съ другой стороны—весьма характеризуетъ его со стороны учебной пользы,—чѣмъ единственно и можетъ быть объяснено такое быстрое его распространеніе. Ознакомившись ближайшимъ образомъ со всѣми качествами, достоинствами и недостатками этого „Сборника“ за все время пользованія имъ, въ связи съ другими сборниками того же рода,—и отдавая полное предпочтеніе именно сборнику г. Сорокина, — мы въ настоящее время желали бы подѣлиться нашимъ мнѣніемъ съ другими преподавателями, особенно интересующимися дѣломъ преподаванія геометріи въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Вдаваться въ подробный *сравнительный* разборъ всѣхъ вышедшихъ „Сборниковъ“ этого рода мы не имѣемъ никакой возможности, ибо это значительно вывело бы насъ изъ намѣченныхъ рамокъ;—но, съ другой стороны, — слышать также мнѣніе и другихъ преподавателей, близко ознакомившихся съ составомъ прочихъ пособій—было бы очень желательно. Мы задались скромной цѣлью разсмотрѣть именно сборникъ г. Сорокина, такъ какъ, съ одной стороны, онъ, какъ намъ кажется, пользуется большей сравнительно популярностью, а съ другой,—сколько намъ извѣстно, это сочиненіе не подверглось еще ни разу подробному разбору, кромѣ краткой, но весьма дѣловитой замѣтки почтеннаго педагога и преподавателя 1-й Казанской гимназіи — г. Жбиковскаго; — но его замѣтка, какъ имѣвшая въ виду только 1-й выпускъ этого сочиненія, въ настоящее время уже мало можетъ имѣть значенія для настоящаго IV изданія этой книги, сильно разнящейся во всемъ ея составѣ съ I ея изданіемъ.

Не обусловливая выбора учебника или пособія исключительно этикетомъ—„одобренъ,“—хотя, впрочемъ, это составляетъ необходимо важное условіе, чтобы имѣть право ввести данное руководство какъ обязательное,—мы хотимъ высказать наше мнѣніе о сборникѣ г. Сорокина, — мнѣніе, добытое на основаніи провѣреннаго долгаго личнаго опыта, въ связи съ многолѣтней педагогической практикой вообще, въ продолженіе непрерывныхъ двадцати почти лѣтъ.

Мы смѣло, въ виду вышесказаннаго, можемъ утверждать, что въ рукахъ опытнаго преподавателя-руководителя „Сборникъ геометрическихъ задачъ г. Сорокина“ можетъ явиться могучимъ орудіемъ для цѣлей обученія и развитія учащейся

молодежи. Свѣжесть мысли, оригинальность, своеобразная новизна и серьезный учебный интересъ—все это въ общей совокупности нашло для себя мѣсто въ этой книгѣ. Здѣсь, именно, мы наблюдаемъ полную соразмѣрность всего того, что дѣлаетъ данную задачу для ученика весьма интересной. Здѣсь нѣтъ почти ни одной задачи, представляющей для ученика головоломныя трудности; нѣтъ безполезнаго нагромаждиванія различныхъ данныхъ, выраженныхъ въ запутанныхъ числахъ; нѣтъ однообразныхъ скучныхъ повтореній и растянутости одной и той же мысли на разные лады, чѣмъ главнымъ образомъ и страдаютъ различные сборники задачъ; нѣтъ непреодолимыхъ трудностей въ построеніи;—но за то есть въ каждой почти задачѣ тотъ самобытный, внутренній ея интересъ, который ее выдѣляетъ изъ ряда остальныхъ, есть именно то, что дѣлаетъ задачу интересной, остроумной; — соединеніе такихъ достоинствъ нужно признать однимъ изъ самыхъ важныхъ для подобныхъ учебныхъ пособій, такъ какъ ученикъ, пользующійся имъ, быстро входитъ въ интересъ дѣла, отдается ему съ охотой, съ любовью, — а пріохотить ученика къ дѣлу, сдѣлать ему его работу пріятной,—это высшій, кульминаціонный пунктъ всѣхъ желаній и стремленій каждаго учителя-педагога. Истина эта такъ проста и естественна, что врядъ ли нужно доказывать ея справедливость. Согласны вполнѣ,—что *работа*, серьезная, *умственная работа*,—не игрушка и потому вовсе не нуждается въ искусственномъ ея украшеніи, чтобы казаться для ученика интереснѣе, но, однако, и умственная работа, какъ самая серьезная изъ всѣхъ другихъ, можетъ оказаться для учащагося тяжелой, скучной, монотонной, хотя, — очень можетъ быть,—и полезной для ученика, но за то,— прежде чѣмъ обнаружится эта польза,—ученикъ уже переутомился на столько, что ему уже не подъ силу болѣе продолжать работать въ томъ же направленіи и, слѣдовательно, — полезность цѣли подобной работы останется лишь благой мечтой.

Подобной тяжелой работой для каждаго ученика чаще всего является необходимость что либо заучивать на память, какъ напримѣръ въ математикѣ—и особенно въ геометріи и въ тригонометріи—заучиваніе наизусть массы разнообразныхъ окончательныхъ формулъ; но если такое заучиваніе исполняется ученикомъ не механически, а болѣе сознательнымъ, разумнымъ образомъ, — какъ напримѣръ рѣшеніемъ различныхъ задачъ и упражненій,—такое усвоеніе тѣхъ же формулъ во 1-хъ никогда такъ не утомитъ ученика, ибо оно пріобрѣтается постепенно, путемъ разумнаго размышленія;—и во 2-хъ,—такое усвоеніе знаній остается въ памяти ученика закрѣпленнымъ несравненно уже на болѣе долгое время. Сборникъ геометрическихъ задачъ г. Сорокина именно обладаетъ такими несомнѣнными внутренними своими достоинствами, весьма характерными и выдѣляющими его изъ ряда другихъ пособій этого же рода, —именно: большинство его задачъ и примѣровъ подобраны г. составителемъ въ такой интересной комбинаціи различныхъ данныхъ, что ученикъ, рѣшившій 2—3 примѣра изъ этого „Сборника", тотчасъ же начинаетъ входить все въ большій и большій интересъ; онъ рѣшаетъ еще цѣлый десятокъ задачъ и примѣровъ, пріобрѣтаетъ уже нѣкоторый навыкъ къ дальнѣйшему рѣшенію, и тѣмъ съ большей охотой отдается этому дѣлу, чѣмъ болѣе встрѣчаетъ матеріалъ, для разработки котораго нужно воспользоваться новыми свѣдѣніями. Очевидно,—простое, голословное рѣшеніе задачъ не могло бы заинтересовать ученика, если бы при этой работѣ онъ не видѣлъ, что чѣмъ глубже онъ входитъ въ интересы этого дѣла, тѣмъ и самое дѣло становится разнообразнѣе, серьезнѣе поучительнѣе.—Лучшимъ поощреніемъ въ своемъ трудѣ онъ видитъ то, что работа начинаетъ спориться въ его рукахъ, явился навыкъ за нее браться и довести до конца. Весьма простыя, почти незамѣтно проскользнувшія, теоретическія свѣдѣнія изъ

геометріи, также легко усвояемыя, какъ и забываемыя, вдругъ проходятъ предъ ученикомъ, при рѣшеніи имъ задачъ по этому „Сборнику“, во всемъ ихъ важномъ примѣненіи и значеніи для дѣла. Таковы, напримѣръ, свѣдѣнія: „о свойствѣ 4-хъ замѣчательныхъ точекъ треугольника; о свойствѣ сторонъ и угловъ четыреугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ; нѣкоторыя свойства сторонъ трапеціи, когда она является вписанной или описанной; объ относительномъ положеніи окружностей; о свойствѣ медіанъ различныхъ фигуръ; разные виды площадей фигуръ, ихъ равновеликость и взаимныя отношенія“.—Равнымъ образомъ и въ отдѣлѣ „Стереометріи“: —„свойство различныхъ сѣченій тѣлъ плоскостями; важнѣйшія свойства призмъ и пирамидъ, различные виды угловъ въ пространствѣ, линейные, плоскіе, двугранные и тѣлесные;—ихъ взаимная зависимость“.—Огромный,—сравнительно, отдѣлъ на тѣла вращенія, при чемъ разобранна масса различныхъ случаевъ при всевозможныхъ положеніяхъ фигуры относительно ея оси вращенія, весьма значительное число задачъ на разные виды пропорціональности во всѣхъ геометрическихъ протяженіяхъ нашли себѣ самое видное мѣсто въ этомъ „Сборникѣ“. Словомъ, — нѣтъ ни одного сколько нибудь интереснаго геометрическаго ученія, которое не осталось бы не затронутымъ и не выставленнымъ въ типичныхъ задачахъ и примѣрахъ сборника г. Сорокина.

Нѣкоторые изъ отдѣловъ геометріи даже въ учебникахъ признаются частностями, возможными для произвольнаго сокращенія, хотя въ дѣйствительности эти „частности“ имѣютъ для развитія учениковъ очень важное значеніе, но почему то и учебники и многіе сборники задачъ отводятъ имъ мало мѣста, затрагивая только вскользь эти вопросы. Къ нимъ принадлежатъ: „4 замѣчательныя точки треугольника; нѣкоторыя важныя свойства вписанныхъ и описанныхъ четыреугольниковъ“. Въ Сборникѣ же г. Сорокина отведено этимъ отдѣламъ очень почтенное мѣсто, и ученикъ, рѣшая эти задачи, невольно заинтересовывается и этими частностями, усматривая въ нихъ также важное значеніе для дѣла.—Весь составъ „Сборника“ такъ удачно скомпанованъ, что, пользуясь имъ, является полная возможность пополнить отрывочныя свѣдѣнія учениковъ даже и по тѣмъ отдѣламъ и вопросамъ, которые слабо затронуты въ учебникахъ и, безъ сомнѣнія, что и эти вопросы, послѣ ряда упражненій по сборнику г. Сорокина, будутъ легко усвоены учениками и это непремѣнно расширитъ ихъ кругозоръ и будетъ имѣть для нихъ большое развивающее значеніе.

Преобладающимъ характеромъ въ составѣ задачъ Сборника является характеръ геометрическій, какъ и должно быть по существу самого дѣла, но при этомъ тригонометрическій методъ ихъ рѣшенія входитъ въ столь разнообразныхъ формахъ, что ученикъ, продѣлавъ самостоятельно хотя бы 3—4 десятка задачъ по этому „Сборнику“, можетъ почти съ увѣренностью сказать, что онъ, вмѣстѣ съ курсомъ геометріи, основательно повторилъ и курсъ тригонометріи и, несомнѣнно, такое повтореніе даетъ ученику лучшую возможность освоиться съ курсомъ и пополнить свѣдѣнія, въ которыхъ или имѣлись пробѣлы, или они были усвоены ученикомъ поверхностно.

Мы сказали выше, что задачи „Сборника“ распредѣлены на отдѣлы, но все же намъ кажется, что полезно было бы въ послѣдующихъ изданіяхъ выдѣлить въ особые отдѣлы 1) задачи на пропорціональность вообще и 2) задачи объ окружностяхъ и площадяхъ, ограниченныхъ этими кривыми. Кромѣ того, въ заключеніе уже, слѣдовало бы прибавить такія задачи, въ которыя введены разнообразныя зависимости между входящими данными, требующими уже общаго знакомства съ курсомъ.—Этотъ послѣдній отдѣлъ,—*„повторительный“*—могъ бы выйти весьма ин-

тереснымъ для дѣла, и можно надѣяться, что талантливый составитель, — г. Сорокинъ, могъ бы выполнить эту работу съ большимъ искусствомъ, и тѣмъ болѣе, что здѣсь ему представлялось бы уже широкое поле для всевозможныхъ характерныхъ комбинацій данныхъ, затрагивая какія угодно геометрическія ученія, безразлично,— на плоскости или въ пространствѣ. Къ сожалѣнію такой важный отдѣлъ задачъ не вошелъ даже въ IV изданіе сборника, отличающагося отъ всѣхъ прочихъ весьма значительными достоинствами.—Замѣчательно при этомъ, что г. Сорокинъ выпустилъ свое IV изданіе съ добавленіемъ 55 номеровъ новыхъ задачъ противъ III-го изданія, но вся эта масса задачъ относится исключительно на вычисленіе объемовъ и поверхностей тѣлъ вращенія, т. е. именно на тотъ отдѣлъ, который и въ предыдущихъ 3-хъ изданіяхъ занималъ довольно видное мѣсто, въ настоящемъ же IV изданіи этому отдѣлу г. составителемъ посвящено 85 очень серьезно составленныхъ задачъ, тогда какъ на всѣ прочіе отдѣлы протяженій въ пространствѣ выдѣлено лишь 78 задачъ. Полагаемъ, что на эту очевидную несоразмѣрность г. Сорокинъ въ слѣдующихъ изданіяхъ своего „Сборника" также обратитъ вниманіе и уравновѣситъ интересы всѣхъ ученій о пространствѣ; тогда достоинства этого сочиненія выйдутъ еще болѣе значительными и важными для дѣла учебной практики.

Какъ бы тамъ ни было, но все же самъ по себѣ отдѣлъ задачъ на „тѣла вращенія" составленъ г. Сорокинымъ весьма обстоятельно. Кромѣ большого числа (85) задачъ, отнесенныхъ на этотъ отдѣлъ, авторъ въ заключеніе приложилъ еще большую теоретическую статью, озаглавивъ ее: „о тѣлахъ вращенія", въ которой обстоятельно разбираетъ всѣ основныя положенія этого вопроса, исчерпывая его во всѣхъ интересныхъ его подробностяхъ, съ той точностью и послѣдовательностью, которыя присущи всему этому „Сборнику", выдвигая его далеко изъ ряда всѣхъ прочихъ пособій того же рода, дѣлая его при этомъ самымъ необходимымъ и полезнымъ въ учебной практикѣ.

Для большаго удобства чтенія и пониманія своей статьи „О тѣлахъ вращенія", г. авторъ обставилъ ее 16-ю прекрасно гравированными чертежами въ самомъ текстѣ, выдѣливъ эту статью совершенно въ отдѣльное ученіе, съ цѣлью выпустить ее отдѣльнымъ оттискомъ, что именно и было имъ исполнено, дабы избавить лицъ, имѣвшихъ уже 3-е изданіе этого „Сборника", куда эта статья не входила, отъ необходимости пріобрѣтать вновь все IV-е изданіе. Статья эта „О тѣлахъ вращенія" въ отдѣльномъ оттискѣ стоитъ только 15 копѣекъ, между тѣмъ какъ все IV изданіе „Сборника", не смотря на свои значительныя добавленія въ числѣ задачъ, улучшенія въ системѣ и, наконецъ, въ добавленіи этой большой статьи,—все же оставлено было г. авторомъ при той же оцѣнкѣ, какъ и III-е изданіе, именно 50 коп. съ пересылкой;—это обстоятельство также весьма характеристично. Весь объемъ этого „Сборника" въ IV его изданіи увеличенъ на 2 листа компактной весьма печати противъ объема III-го изданія той же книги, и все же цѣна ея осталась не повышенной ни на 1 копѣйку.—Не ясно ли въ такомъ случаѣ, что выпуская это новое изданіе, авторомъ преслѣдовалась исключительно только одна симпатичная и весьма похвальная цѣль — быть полезнымъ для дѣла,—а отнюдь не матеріальная сторона,—цѣль наживы; здѣсь для этого нѣтъ и тѣни. Вотъ почему эта книга на долго останется лучшимъ и полезнымъ ученымъ другомъ какъ въ рукахъ педагога-практика, такъ и для массы любознательной молодежи. Отдаваясь ея руководству, ученикъ, одновременно, входитъ во внутренній интересъ дѣла, начинаетъ любить это дѣло и, такимъ образомъ, незамѣтно для самого себя, постепенно совершенствуется и развивается. Пользу эту трудно оцѣнить словами, ее нельзя также подмѣтить изъ одного только поверхно-

стнаго разсмотрѣнія этой книги, — но она становится весьма очевидной при самой педагогической практикѣ, непрерывной, многолѣтней.

Взвѣшивая все сказанное объ этомъ весьма полезномъ „Сборникѣ" г. Сорокина, мы желаемъ этому почтенному труду полнаго процвѣтанія въ настоящемъ, совершенствованія и расширенія въ будущемъ для той пользы, которую онъ можетъ принести нашей учащейся молодежи въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ, при повтореніи курсовъ геометріи и тригонометріи.

Преподаватель Симбирской гимназіи
П. Полетика (Симбирскъ).

ЗАДАЧИ.

№ 278. Крестьяне нѣкоторыхъ мѣстностей пользуются слѣдующимъ способомъ умноженія цѣлыхъ чиселъ: пишутъ рядомъ оба сомножителя и одинъ изъ нихъ дѣлятъ, а другой умножаютъ на два и подписываютъ какъ частное, такъ и произведеніе подъ соотвѣтствующими множителями. Затѣмъ полученное частное снова дѣлятъ, а произведеніе умножаютъ на два, подписывая новое частное и произведеніе подъ прежними, и продолжаютъ это до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится единица. Всѣ числа въ столбцѣ произведеній, стоящія противъ нечетныхъ чиселъ въ столбцѣ частныхъ, отмѣчаются чертой и затѣмъ складываются. Сумма и будетъ искомымъ произведеніемъ. Такъ, напр., при умноженіи 35 на 42, дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

35	42 —
17	84 —
8	168
4	336
2	672
1	1344 —

$$42 + 84 + 1344 = 1470 = 35 \times 42.$$

Требуется объяснить этотъ способъ умноженія.

Я. Полушкинъ (с. Знаменка).

№ 279. Найти трехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: разность между искомымъ числомъ и его обращеннымъ есть двузначное число, а разность квадратовъ искомаго числа и его обращеннаго есть произведеніе нѣкотораго двузначнаго числа на 949.

Е. Заусцинскій (Пинскъ).

№ 280. Двѣ окружности пересѣкаются въ точкахъ A и B. Къ нимъ проведена общая касательная. Черезъ точки прикосновенія C и

D проведена окружность, которая также проходитъ черезъ точку B. Показать, что діаметръ этой окружности есть средняя пропорціональная между діаметрами данныхъ окружностей.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 281. Даны четыре точки A, B, C и D на одной прямой при извѣстныхъ разстояніяхъ $AB=m$ и $CD=n$; провести черезъ нихъ двѣ пары параллельныхъ линій такъ, чтобы въ пересѣченіи получился квадратъ. Указать, возможно ли при томъ же условіи построеніе ромба съ даннымъ угломъ.

(Заимств.) *В. Евгеновъ* (Бѣлгородъ).

№ 282. Сумма кубовъ, пятыхъ и седьмыхъ степеней n первыхъ чиселъ натуральнаго ряда равна 740301728400. Сколько чиселъ было взято?

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

№ 283. На плоскости дана точка A и на нѣкоторомъ разстояніи отъ нея проведена прямая, перпендикулярная къ плоскости. По прямой движется свѣтящаяся точка S. Опредѣлить уголъ, составленный лучомъ SA съ плоскостью, при которомъ сила свѣта въ точкѣ A есть наибольшая. (Задача Ламберта).

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 197 (3 сер.). Въ данный треугольникъ ABC вписанъ треугольникъ MNP такъ, что $PN \| BC$, а MN и MP соотвѣтственно перпендикулярны къ AC и AB. По даннымъ сторонамъ треугольника ABC вычислить стороны треугольника MNP.

Чтобы вписать треугольникъ MNP въ треугольникъ ABC, проводимъ изъ A діаметръ описанной окружности, пересѣкающій BC въ точкѣ M, а окружность—въ точкѣ K. Опустивъ изъ M перпендикуляры MP на AB и MN на AC, получимъ требуемый $\triangle\ MNP$.

Пусть $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ и $\triangle=$ площади ABC. Легко найдемъ:

$$BK=\sqrt{4R^2-c^2}=\frac{c}{2\triangle}\sqrt{a^2b^2-4\triangle^2}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4\triangle},$$

$$CK=\sqrt{4R^2-b^2}=\frac{b}{2\triangle}\sqrt{a^2c^2-4\triangle^2}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{4\triangle},$$

гдѣ R есть радіусъ описанной окружности. Пусть O—центръ этой окружности, а OQ—разстояніе отъ O до BC. Тогда

$$OQ = {}^1/_2\ \sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{a}{4\triangle}\sqrt{b^2c^2 - 4\triangle^2} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{8\triangle}.$$

Опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AS на BC. Тогда

$$\frac{AM}{MO} = \frac{AS}{OQ} \text{ или } \frac{AM}{AO} = \frac{AS}{AS-OQ},$$

откуда

$$AM = \frac{AO.AS}{AS-OQ} = \frac{4abc.\triangle}{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}.$$

Зная BK, CK и AM, легко найдемъ

$$MP = \frac{BK.AM}{AK} = \frac{2\triangle c(a^2+b^2-c^2)}{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2};$$

$$MN = \frac{CK.AM}{AK} = \frac{2\triangle b(a^2+c^2-b^2)}{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2};$$

$$PN = \frac{BC.AM}{AK} = \frac{8a\triangle^2}{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}.$$

А. Бачинскій (с. Любень); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*; *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Спб.).

№ 198 (3 сер.). Опредѣлить величину a, при которой выраженіе

$$\frac{x^2+2ax+3}{x^2+2x+2}$$

не можетъ быть больше 2.

Такъ какъ $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, то неравенство

$$\frac{x^2+2ax+3}{x^2+2x+2} \leqslant 2$$

можно представить въ видѣ

$$x^2+2ax+3 \leqslant 2(x^2+2x+2),$$

или

$$2ax \leqslant x^2+4x+1,$$

откуда при x положительномъ

$$a \leqslant \frac{x^2+4x+1}{2x},$$

а при x отрицательномъ

$$a \geqslant \frac{x^2+4x+1}{2x}.$$

А. Бачинскій (с. Любень); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р*; *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Спб.).

№ 205 (3 сер.). Показать, что если l и l' суть внутренній и внѣшній биссекторы угла треугольника, заключеннаго между сторонами a и b, S—площадь треугольника, а r—радіусъ круга описаннаго, то

$$l'^2 + l^2 = \frac{64r^2S^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

Пусть въ треугольникѣ ABC внутренній биссекторъ угла C есть CD, а внѣшній—CD'. Извѣстно, что

$$\frac{AD'}{BD'} = \frac{AD}{BD}, \text{ откуда } \frac{AD'+AD}{AD} = \frac{BD'+BD}{BD}. \quad . \quad (1)$$

Но $AD'+AD = DD'+2AD = \sqrt{l^2+l'^2}+2AD,\ BD'+BD = DD'$,

$$AD = \frac{cb}{a+b},\ BD = \frac{ac}{a+b}.$$

Подставляя эти значенія въ равенство (1), найдемъ

$$DD' = \sqrt{l^2+l'^2} = \frac{2abc}{a^2-b^2} = \frac{8rS}{a^2-b^2}.$$

А. Шантыръ, Э. Заторскій (Спб.); *М. Зиминъ* (Орелъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р. Д. Цельмеръ* (Тамбовъ).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *С. Григорьева* (Самара) 222, 235, 240, 244, 249, 250 (3 сер.); *А. Бюрно* (Самара) 317 (2 сер.); *В. Поздюнина* (Самара) 56, 66, 219, 222, 257 (3 сер.), 317, 422 (2 сер.); *Я. Теплякова* (Радомысль) 262, 263 (3 сер.); *учениковъ Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.* 180, 191, 224, 227, 228, 230, 232, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 247, 248, 249, 250, 252, 254, 255, 256, 257, 259 (3 сер.); *С. Соколова* (Тамбовъ) 249, 256 (3 сер.); *С. Адамовича* (Двинскъ) 211, 217, 222, 235, 238, 239, 240 (3 сер.); *Е. Заусцинскаго* (Пинскъ) 227, 230, 237, 240, 244 (3 сер.); *А. П—гина* (Оренбургъ) 243, 244, 245, 249 (3 сер.); *В. Евгенова* (Бѣлгородъ) 237, 244, 249 (3 сер.); *Ю. Идельсона* (Одесса) 262 (3 сер.); *учениковъ Рижскаго реальн. училища Императора Петра I Р. З. и И. Л.* 227, 237, 239 (3 сер.); *Лежебока* (Иваново-Вознесенскъ) 237, 239, 240, 244, 263 (3 сер.); *Б. К.* (Тамбовъ) 204, 239, 249, 256 (3 сер.); *Дм. Цельмера* (Тамбовъ) 202, 204, 205, 209, 210, 212, 221, 244, 246, 256 (3 сер.); *В. Соковича* (Кіевъ) 207, 220, 221, 222, 249, 256 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 249 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 256, 260, 262 (3 сер.), 499 (2 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 255 (3 сер.), 220, 483 (2 сер.), 188, 359 (1 сер.); *Э. Заторскаго* (Вильно) 194, 208, 217, 232, 243, 244, 245, 247, 249, 252, 255, 256, 257, 263, 264 (3 сер.).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 25-го Января 1896 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 29.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1896 ГОДЪ
НА
ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ

„ЗАПИСКИ"

Императорскаго Русскаго Техническаго Общества

(тридцатый годъ изданія).

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

Дѣятельность Общества: Журналы засѣданій общихъ собраній и Совѣта Общества. Журналы засѣданій Отдѣловъ: I (Химическаго), II (Механическаго), III (Строительнаго), IV (Военно-морского), V (Фотографическ го), VI (Электротехническаго), VII (Воздухоплавательнаго), VIII (Желѣзнодорожнаго), IX (По Техническому образованію). **Труды Общества:** Доклады, читанные въ засѣданіяхъ Общества и работы его членовъ. **Техническая Литература:** статьи по всѣмъ отраслямъ техники. **Техническое Обозрѣніе:** новости по различнымъ техническимъ производствамъ. **Библіографія. Правительственныя** распоряженія, имѣющія отношеніе къ техникѣ и технической промышленности. „**Привилегіи,** выдаваемыя по Департаменту Торговли и Мануфактуръ" — полное описаніе съ чертежами всѣхъ выдаваемыхъ въ Россіи привилегій на изобрѣтенія, касающіяся технической промышленности (Помѣщается исключительно при „Запискахъ").

Подписная цѣна Журнала «ЗАПИСКИ»

	съ пересылкой и доставкой	съ пересылкой за границу
на годъ	12 руб.	16 руб.
на полгода	7 „	9 „

ОБЪЯВЛЕНІЯ ПРИНИМАЮТСЯ:

Разовыя за 1 стр. 4 р., за $^1/_2$ страницы 3 р. Годовыя со всякаго срока на обложкѣ за 1 стр. 50 р. Впереди текста за $^1/_2$ стр. 20 р., за одну стр. 35 р., за 2 стр. 50 р. Вкладныя за 1000 шт. (до 1 л. вѣса) 10 руб.

Подписка принимается въ редакціи. С.-Петербургъ, Пантелеймонская, 2 и у книгопродавцевъ. Гг. иногородніе благоволятъ обращаться преимущественно въ редакцію.

„Записки" Императорскаго Русскаго Техническаго Общества за прежніе года можно пріобрѣсть въ Редакціи. Съ 1867 по 1889 г. по 4 р. за годъ и 1 руб. за отдѣльный выпускъ, за 1890—94 г. 8 р. за годъ и 2 руб. за отдѣльный выпускъ. При пріобрѣтеніи „Записокъ" за 19 лѣтъ цѣна въ сложности опредѣлена въ 70 руб. съ доставкой и пересылкой, а для школьныхъ, общественныхъ и частныхъ библіотекъ, согласно постановленія Совѣта Императорскаго Русскаго Техническаго Общества— 40 руб. За года 1868, 1884, 1885 и 1888 „Записки" всѣ разошлись.

Спеціальный редакторъ **А. Сигуновъ.**
Отвѣтственный редакторъ **Е. С. Федоровъ.**

Редакція „Записокъ" И. Р. Т. О. имѣетъ честь сообщить, что число нумеровъ „Записокъ" въ предстоящемъ году можетъ быть будетъ сокращено, но не въ ущербъ числу статей и количеству печатныхъ листовъ, которое въ общемъ итогѣ будетъ то же самое. 3—2

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

10. — 1895.

Visibilité de l'hémisphère obscur de Vénus. *C. Flammarion.* — Во время послѣдняго соединенія Венеры особенное вниманіе обсерваторіи Juvisy было обращено на необъясненное до сихъ поръ явленіе — видимость неосвѣщенной части Венеры. Это явленіе было замѣчено еще въ началѣ прошедшаго столѣтія англійскимъ пасторомъ Derham, въ сочиненіи котораго есть замѣчаніе, что въ то время, когда Венера и Луна имѣютъ видъ тонкихъ серповъ, видна и неосвѣщенная часть ихъ, имѣющая темно-ржавый цвѣтъ (dull and rusty colour). Можно ли объяснить это явленіе такъ же, какъ и пепельный свѣтъ луны? По вычисленіямъ Фламмаріона свѣтъ земли для Венеры въ 12000 разъ слабѣе, чѣмъ для луны и въ 888 разъ слабѣе свѣта полной луны (для земли); такого слабаго освѣщенія, по мнѣнію Фламмаріона, недостаточно для полнаго объясненія разсматриваемаго явленія. Такъ какъ темная часть Венеры кажется темнѣе фона неба и имѣетъ фіолетовый оттѣнокъ, то Фламмаріону кажется вѣроятнымъ такое объясненіе: *темный* дискъ Венеры проэктируется на *болѣе свѣтлый* фонъ неба, освѣщенный зодіакальнымъ свѣтомъ*) и свѣтомъ высшихъ слоевъ солнечной атмосферы; дискъ Венеры не совсѣмъ теменъ, но слабо освѣщенъ солнечными лучами, преломленными ея атмосферой и имѣющими, вѣроятно, какъ и на землѣ, красноватый цвѣтъ; фіолетовый оттѣнокъ можетъ имѣть и другія причины, напр., фосфоресценцію облаковъ, отраженіе земного свѣта, хроматизмъ объектива.

Coelostat. Appareil à miroir donnant une image du ciel immobile par rapport à la Terre. *G. Lippmann.* — Приборъ Lippmann'а, дающій неподвижное изображеніе неба, состоитъ изъ плоскаго зеркала, вращающагося со скоростью одного оборота въ 48 звѣздныхъ часовъ около оси, параллельной оси міра и параллельной плоскости зеркала. Можно доказать, что изображеніе любой звѣзды въ этомъ зеркалѣ будетъ неподвижнымъ.

Фиг. 72.

Пусть EO (фиг. 72) падающій лучь, OE' — продолженіе отраженнаго; такъ какъ плоскость зеркала дѣлитъ пополамъ уголъ EOE', то она будетъ плоскостью симметріи и слѣд. для любого направленія OP $\angle EOP = \angle E'OP$; если OP параллельно оси міра, то $\angle EOP$ — полярное разстояніе свѣтила — величина, отъ времени не зависящая, а потому и E'OP величина постоянная. Пусть AB (фиг. 73) — слѣдъ зеркала и P — проэкція OP на плоскость экватора, PE и PE' — слѣды плоскостей EOP и E'OP; когда зеркало повернется на $\angle BPB' = \beta$, то EP вслѣдствіе суточнаго движенія небес-

*) Во время послѣдняго соединенія Венера была видна въ $7^1/_2{}^0$ отъ солнца, а такъ какъ зодіакальный свѣтъ замѣтенъ на нѣсколько десятковъ градусовъ отъ солнца, то онъ долженъ быть очень яркимъ въ $7—8^0$.

наго свода повернется на уголъ $EPF = \alpha$ и PE' займетъ положеніе PF'; согласно вышесказанному $\angle EPB = \angle BPE'$ и $\angle FPB' = \angle B'PF'$ или

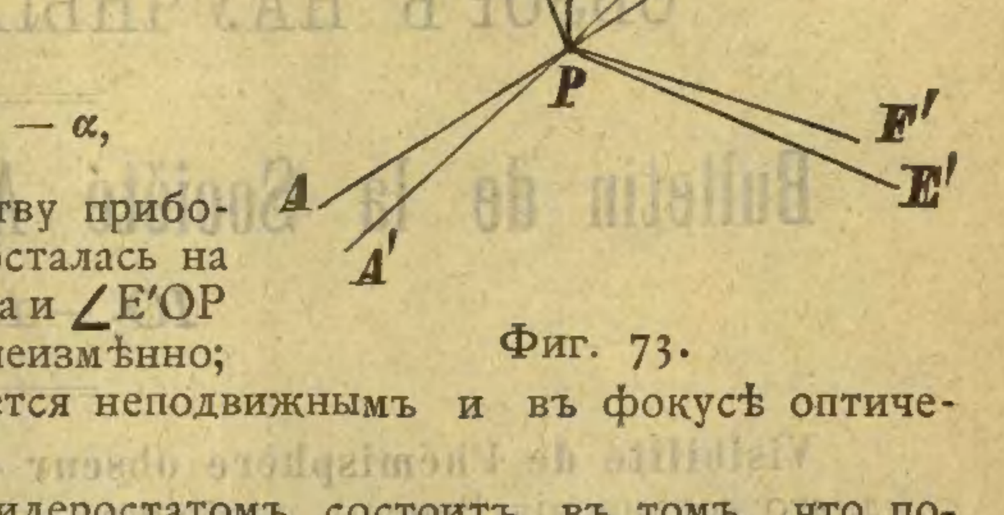
$$\angle EPB' + \beta = \angle BPF' + \angle F'PE'$$

$$\alpha + \angle EPB' = \beta + \angle BPF';$$

послѣ вычитанія получаемъ:

$$\beta - \alpha = F'PE' - \beta \text{ или } F'PE' = 2\beta - \alpha,$$

но такъ какъ $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ согласно устройству прибора, то $F'PE' = O$, т. е. плоскость $E'OP$ осталась на мѣстѣ, если же плоскость $E'OP$ неподвижна и $\angle E'OP$ постояненъ, то слѣд. и направленіе OE' неизмѣнно; неподвижное изображеніе свѣтила останется неподвижнымъ и въ фокусѣ оптической трубы, направленной на зеркало.



Фиг. 73.

Преимущество coelostat'а предъ сидеростатомъ состоитъ въ томъ, что послѣдній даетъ неподвижное изображеніе только *одной* звѣзды; сравнительно съ экваторіаломъ преимущество то, что coelostat, благодаря простотѣ устройства и своей легкости, можетъ быть устроенъ гораздо точнѣе.

Atmosphère et rivières lunaires. *W. Pickering.*—Въ статьѣ приводятся нѣкоторые факты, позволяющіе усумниться въ истинности тѣхъ доводовъ, которые выставляются въ пользу ходячаго мнѣнія о лунѣ, какъ планетѣ, лишенной атмосферы и воды. Главные доводы въ пользу этого мнѣнія сводятся къ отсутствію рефракціи при покрытіи звѣздъ луною, рѣзкости тѣней и отсутствію на лунѣ полутѣней и сумерокъ. Еще въ 1864 году наблюденія въ Гринвичѣ показали, что при покрытіи звѣздъ луною замѣчается рефракція около 2" (если принять вѣрной величину луннаго діаметра). Въ обсерваторіи на Арекипѣ нерѣдко были наблюдаемы полутѣни и даже настолько слабыя, что можно было разглядѣть въ нихъ нѣкоторыя подробности лунной поверхности. При фотографированіи Юпитера непосредственно до и послѣ момента покрытія, т. е. въ моменты соприкосновенія получался около него ореолъ. Непосредственнымъ наблюденіемъ и при фотографированіи въ такихъ случаяхъ замѣчали на Юпитерѣ темную полосу перпендикулярную его экваторіальнымъ полосамъ и касательную къ краю луны; нельзя объяснить послѣдняго явленія предположеніемъ лунной атмосферы, такъ какъ она должна бы быть слишкомъ плотной (плотнѣе земной) для того, чтобы произвести такое сильное поглощеніе лучей; притомъ полоса наблюдается только около свѣтлаго края луны; быть можетъ поглощающее дѣйствіе производятъ водяные пары, поднятые дѣйствіемъ солнечныхъ лучей на нѣкоторую небольшую высоту. Хотя обыкновенные доводы въ пользу отсутствія воды на лунѣ и резонны, но есть факты, говорящіе въ пользу того, что въ небольшомъ хотя бы количествѣ вода на лунѣ, если не теперь, то хоть прежде была. При внимательномъ изслѣдованіи различныхъ трещинъ, бороздокъ, зигзаговъ замѣчаются двоякаго рода впадины: однѣ направлены ко дну кратера (напр. на Hyginus) или къ морю и кажутся какъ бы обвалами; другія, своей формой сильно напоминающія наши рѣки, постепенно расширяются и оканчиваются грушевиднымъ устьемъ, расположеннымъ всегда *выше* болѣе узкаго конца; если ихъ считать ложами существующихъ или высохшихъ рѣкъ, то вода должна была вытекать изъ озера и, спускаясь внизъ и быстро испаряясь, постепенно теряться въ пустыняхъ (нѣчто подобное встрѣчается въ Западной части южной Америки); вода въ этихъ озерахъ могла появиться благодаря вулканической дѣятельности. Наиболѣе характерное ложе рѣки начинается съ горы Hadley; изъ 26 рѣкъ—19 текутъ къ сѣверу. Внутри многихъ кратеровъ, а также внутри почти всѣхъ морей, замѣчены темныя пятна, измѣняющіяся по виду и размѣрамъ въ теченіи мѣсяца, а иногда и совсѣмъ исчезающія. Наиболѣе изучены они на Alphonsus, Atlas и Hansteen; оказывается, что они кажутся наиболѣе темными дня черезъ два послѣ прохожденія солнца черезъ ихъ меридіанъ и перестаютъ быть видимыми при очень косомъ освѣщеніи, изъ чего приходится заключить, что здѣсь происходитъ какое то измѣненіе въ самихъ свойствахъ отражающихъ поверхностей; Maedler и Neison склонны объяснить эти явленія различными фазами растительности. Точно также при сравненіи оттѣнковъ морей попарно (напр. Mare Feconditatis и Mare Crisium, M. Nectaris и M. Serenitatis и